KARAKTERISTIK RUANG HASIL KALI DALAM PADA FUNGSI KONVEKS KUAT

TUGAS AKHIR

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
Pada Jurusan Matematika

Oleh:

DESI HARTUTI
10754000066

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU

2011

KARAKTERISTIK RUANG HASIL KALI DALAM PADA FUNGSI KONVEKS KUAT

DESI HARTUTI
10754000066

Tanggal Sidang : 05 Juli 2011
Priode Wisuda :

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR Soebrantas KM 15,5 No. 155 Simpang Baru Panam Pekanbaru

ABSTRAK

Penelitian ini mengulas tentang karakteristik ruang hasil kali dalam pada fungsi konveks kuat. Karakteristik ruang hasil kali dalam pada fungsi konveks kuat yang akan diperoleh apabila ketiga pernyataan berikut terpenuhi dengan memanfaatkan aturan jajaran genjang Jordan-Von Neumann pada lemma dan teorema:

1. $(X, \|.\|)$ merupakan ruang hasil kali dalam
2. $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ adalah fungsi konveks kuat dengan modulus $c > 0$ jika dan hanya jika $f - c\|.\|^2$ adalah fungsi konveks
3. $\|.\|^2$ adalah fungsi konveks kuat dengan modulus 1.

Berdasarkan hasil penelitian diperoleh bahwa ketiga pernyataan tersebut terpenuhi.

Kata kunci: *aturan jajaran genjang Jordan-Von Neumann, fungsi konveks kuat, fungsi semi konveks kuat.*

CHARACTERIZATIONS OF INNER PRODUCT SPACES BY STRONGLY CONVEX FUNCTIONS

DESI HARTUTI
10754000066

Date of Final Exam : 05 *July* 2011
Date of Graduation Cremony :

Department of Mathematics
Faculty of Sciences and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR Soebrantas KM 15,5 No. 155 Simpang Baru Panam Pekanbaru

ABSTRACT

At this moment will comment about the characterizations of inner product spaces by strongly convex functions. Using the parallelogram law Jordan-Von Neumann in lemma and theorema we get characterizations of inner product spaces by strongly convex functions. In particular, it is shown that the following conditions are equivalent:
(1) $(X, \|\cdot\|)$ *is an inner product space;*
(2) $f : X \to \mathbb{R}$ *is strongly convex with modulus* $c > 0$ *if and only if* $f - c\|\cdot\|^2$ *is convex;*
(3) $\|\cdot\|^2$ *is strongly convex with modulus* 1.
The result of obtained part of third solutions declaration fufilled so characterizations of inner product spaces are third statement.

Keyword: *strongly convex functions, strongly midconvex functions, the parallelogram law Jordan-Von Neumann.*

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirobil'alamin, segala puji bagi Allah SWT, Rabb semesta alam. Berkuasa dan berkehendak atas segala sesuatu dan telah membimbing serta mendidik dengan pendidikan yang terbaik sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini sebagai salah satu syarat untuk mendapatkan gelar sarjana dengan judul **" Karakteristik Ruang Hasil Kali Dalam pada Fungsi Konveks Kuat"**.

Shalawat dan salam bagi Baginda Rasulullah SAW, uswatun hasanah dan semagat dalam beraktivitas, serta para sahabat sebagai pemacu semangat dalam meraih ridho dan cinta-Nya.

Selanjutnya ucapan terimakasih kepada orang tuaku tercinta yang telah membesarkanku dengan penuh cinta, kasih sayang dan selalu mendo'akan untuk kesuksesan penulis serta memberikan bantuan baik secara dukungan moril maupun materil yang tak pernah dapat penulis hitung jumlahnya, selanjutnya buat kakak dan adikku tersayang yang telah memberikan semangat dan motivasi sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini.

Penulis juga mengucapkan terimakasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Nazir selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Dra. Hj. Yenita Morena, M.Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Riau.
3. Yuslenita Muda, M.Sc selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi sekaligus Pembimbing penulis, yang selalu memberikan nasehat dan masukkan serta ilmu yang bermanfaat sehingga tugas akhir ini dapat diselesaikan.
4. Fitri Aryani, M.Sc selaku Koordinator Tugas Akhir.
5. Seluruh dosen di lingkungan Fakultas Sains dan Teknologi khususnya Jurusan Matematika.

Penulis telah berusaha semaksimal mungkin dalam penyusunan tugas akhir ini.Walaupun demikian tidak tertutup kemungkinan adanya kesalahan dan kekurangan, baik dalam penulisan maupun dalam penyajian materi. Untuk itu penulis mengharapkan kritik dan saran dari berbagai pihak demi kesempurnaan tugas akhir ini.

Pekanbaru, 05 Juli 2011

Desi Hartuti
10754000066

DAFTAR ISI

	Halaman
LEMBAR PERSETUJUAN	ii
LEMBAR PENGESAHAN	iii
LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL	iv
LEMBAR PERNYATAAN	v
LEMBAR PERSEMBAHAN	vi
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	viii
KATA PENGANTAR	ix
DAFTAR ISI	xi
DAFTAR SIMBOL	xiii
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang Masalah	I-1
1.2 Rumusan Masalah	I-2
1.3 Batasan Masalah.	I-2
1.4 Tujuan Penulisan	I-2
1.5 Manfaat Penulisan	I-2
1.6 Sistematika Penulisan	I-3
BABII LANDASAN TEORI	
2.1 Ruang Vektor	II-1
2.2 Ruang Norma dan Ruang Hasil Kali Dalam	II-2
2.3 Fungsi Konveks	II-4
2.4 Fungsi Konveks Kuat	II-8
BAB III METODOLOGI PENELITIAN	

BAB IV KARAKTERISTIK RUANG HASIL KALI DALAM PADA
FUNGSI KONVEKS KUAT
4.1 Fungsi Konveks Kuat IV-1
4.2 Lemma dan Teorema yang digunakan untuk Mendapatkan
Karakteristik Ruang Hasil Kali Dalam IV-2

BAB V PENUTUP
5.1 Kesimpulan V-1
5.2 Saran V-1

DAFTAR PUSTAKA
DAFTAR RIWAYAT HIDUP

BAB I

PENDAHULUAN

Bab ini terdiri dari latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

1.1 Latar Belakang Masalah

Seiring dengan perkembangan ilmu matematika, para ilmuan terus mengembangkan teori-teori yang telah ada seperti fungsi konveks. Fungsi konveks lahir dari teori ketaksamaan, yaitu sejak munculnya literatur yang dirintis oleh Jensen, maka banyak teorema yang melibatkan fungsi konveks, salah satunya yaitu teorema *Jensen's inequality* (Greenberg dkk, 1971). Fungsi ini banyak digunakan dalam aplikasi matematika, terutama dalam membangun fungsi yang bersifat positif atau fungsi naik. Hal ini menyebabkan fungsi konveks menjadi bagian utama dan menjadi dasar yang tepat dalam menjelaskan teori fungsi riil, (Jensen dalam Niculescu dkk, 2004).

Konveks merupakan dasar bagi persoalan optimasi, dan juga sangat penting perannya dalam matematika statistik, matematika ekonomi, fungsi analisis, teori hampiran, dan lain sebagainya (Dahl, 2010). Kita Sering menemukan masalah optimasi dalam fungsi konveks seperti meminimumkan nilai fungsi riil dari n variabel hal ini terdapat pada aplikasi matematika ekonomi, sedangkan aplikasi statistik seperti estimasi dan regresi (Dahl, 2010).

Fungsi konveks memberikan pengaruh yang besar dan baik antara analisis dan geometri apabila dilihat dari pandangan modern, hal ini menarik untuk dibaca seperti karangan yang mengesankan dari *Brunn-minkowski inequality*, namun latar belakang fungsi konveks lebih menggunakan kalkulus dasar dan aljabar linier (Niculescu, 2004). Perkembangan aljabar linier yang bersifat membangun fungsi konveks kuat adalah di dalam fungsi konveks kuat terdapat karakteristik ruang hasil kali dalam (*inner product space*). Berdasarkan Proses pembelajaran sebelumnya, penulis hanya menemukan ruang hasil kali dalam pada ruang *euclidean*, ruang matriks dan ruang polinomial. Maka dengan adanya jurnal tentang karakteristik ruang hasil kali dalam (*inner product space*) pada fungsi konveks kuat oleh Kazimierz Nikodem dan Zsolt Pales, penulis tertarik untuk mengulas kembali dan mengangkat **"Karakteristik Ruang Hasil Kali Dalam pada Fungsi Konveks Kuat"** sebagai judul dalam penulisan tugas akhir ini.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam penelitian tugas akhir ini adalah bagaimana karakteristik atau ciri-ciri ruang hasil kali dalam (*inner product space*) pada fungsi konveks kuat.

1.3 Batasan Masalah

Agar mencapai hasil yang diinginkan maka penulis membatasi permasalahan tugas akhir ini hanya pada karakteristik ruang hasil kali dalam pada fungsi konveks kuat dengan domain $\mathbb{R}^2$.

1.4 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah mendapatkan karakteristik ruang hasil kali dalam (*inner product space*) pada fungsi konveks kuat dengan memanfaatkan aturan jajaran genjang Jordan-Von Neumann dan *Jensen's inequality*.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diperoleh dari penulisan tugas akhir ini adalah:

a. Manfaat secara umum

   Mendapatkan informasi terbaru tentang perkembangan ilmu pengetahuan matematika dan menambah perbendaharaan ilmu pengetahuan dalam bidang analisis.

b. Manfaat bagi penulis

Penulis mendapatkan karakteristik ruang hasil kali dalam (*inner product space*) dalam fungsi konveks kuat.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika dalam penulisan tugas akhir ini terdiri dari beberapa bab, yang memberikan gambaran menyeluruh, yaitu:

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisikan tentang gambaran umum isi tugas akhir yang meliputi latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penyusunan dan sistematika penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Bab ini berisikan teori-teori yang berhubungan dengan penyelesaian hasil tugas akhir, seperti karakteristik ruang hasil kali dalam, aturan jajaran genjang Jordan-Von Neumann dan *Jensen's inequality*, *Chaucy Scwarz inequality*, himpunan konveks, fungsi konveks, fungsi konveks kuat.

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini berisikan tentang studi literatur serta langkah-langkah yang digunakan penulis untuk mencapai tujuan dari penelitian ini.

BAB IV ISI

Bab ini berisikan tentang lemma-lemma ataupun teorema yang mendukung dan perlu dibuktikan guna menemukan karakteristik ruang hasil kali dalam pada fungsi konveks kuat.

BAB V PENUTUP

Bab ini berisikan kesimpulan dari keseluruhan pembahasan serta saran-saran kepada pembaca.

BAB II

LANDASAN TEORI

Secara umum dalam analisis dikenal dua macam fungsi yaitu fungsi riil dan fungsi kompleks. Fungsi riil merupakan suatu fungsi nyata dan elemen pembentuknya adalah bilangan riil itu sendiri, sedangkan elemen fungsi kompleks merupakan gabungan antara bilangan riil dan imajiner. Salah satu fungsi yang menjadi bagian utama dan menjadi dasar yang tepat dalam menjelaskan teori fungsi riil adalah fungsi konveks, sebelum menjelaskan fungsi konveks terlebih dahulu dijelaskan teori-teori dasar yang mendukung fungsi konveks, seperti: ruang vektor, ruang norma dan ruang hasil kali dalam, dan teorema- teorema yang yang berkaitan dengan fungsi konveks.

2.1 Ruang Vektor

Definisi 2.1 (Kreyszig, 1978) Diberikan sebarang himpunan tak kosong X. Maka X dikatakan ruang vektor jika memenuhi:

1. Grup Abelian terhadap operasi penjumlahan $(X, +)$

   Himpunan $x, y \in X$ dikatakan grup abelian $(X, +)$ yaitu:

   a. Tertutup terhadap operasi penjumlahan

      $\forall x, y \in X, \qquad x + y \in X$

   b. Memenuhi sifat distributif

      $\forall x, y, z \in X, (x + y) + z = x + (y + z),$

   c. Terdapat elemen identitas

      $\exists 0 \in X$, sedemikian sehingga $\forall u \in X$, $u + 0 = u$,

   d. Memenuhi sifat komutatif

      $\forall x, y \in X,\ x + y = y + x,$

   e. Terdapat elemen invers

      $\forall u \in X, \exists -u \in X$ sedemikian sehingga $u + (-u) = 0$.

2. Vektor terhadap operasi perkalian oleh skalar $(X, .)$

   Untuk setiap vektor x dan skalar α, maka suatu vektor $x\alpha$ disebut perkalian α dan x, dengan cara yang sama untuk setiap vektor x, y dan skalar α, β berlaku:

   $$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$$
   $$1x = x,$$

   dan berlaku hukum distributif yaitu:

   a. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$, hukum distributif kiri

   b. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$, hukum distributif kanan.

2.2 Ruang Norma dan Ruang Hasil Kali Dalam

Definisi 2.2 (Kreyszig, 1978) Suatu ruang norma X adalah sebuah ruang vektor dengan norma tertentu di dalamnya. Norma pada ruang vektor X adalah suatu nilai fungsi riil pada X, dapat ditulis sebagai $\|x\|$ dan dibaca norma x. Ruang norma memiliki beberapa sifat dasar yaitu:

1. $\|x\| \geq 0, \forall x \in X$ dan untuk $\|x\| = 0 \leftrightarrow x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|, \forall x \in X, \lambda \in \mathbb{F}$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X$.

Definisi 2.3 (Kreyszig, 1978) Ruang hasil kali dalam merupakan ruang vektor X dengan hasil kali dalam tertentu pada X. Ruang hasil kali dalam pada X adalah $\langle ., . \rangle$: X x $X \rightarrow K$. Untuk setiap pasangan x dan y dihubungkan dengan skalar dapat ditulis: $\langle x, y \rangle$, disebut ruang hasil kali dalam x dan y, sedemikian sehingga untuk setiap vektor x, y, z dan skalar α berlaku:

1. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
2. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
3. $\langle x, y \rangle = \langle \overline{y, x} \rangle$, (*complex conjugation*)
4. $\langle x, x \rangle \geq 0$, untuk $\langle x, x \rangle = 0 \leftrightarrow x = 0$.

Diketahui bahwa $\langle .|. \rangle$ adalah ruang hasil kali dalam pada V, maka diperoleh norma $\|.\|$ pada V, yang di definisikan $\| x \| = \langle x, x \rangle^{1/2}$, $\forall x \in V$. Kedua konsep ini dapat digambarkan pada teorema ketaksamaan *Chauchy Scwarz.*

Teorema 2.1 ***Cauchy- Schwarz inequality*** (Hachez, 2003) Diberikan sebarang ruang $\langle .|. \rangle$ adalah ruang hasil kali dalam V, sehingga:

$$|\langle x , y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\| \tag{2.1}$$

dengan $\|.\|$adalah norma.

<u>Bukti:</u>

Diberikan $x, y \in V$ dan $\lambda \in \mathbb{R}$, misalkan $y \neq 0$

akan ditunjukkan $|\langle x , y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$

$0 \leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \langle x,x \rangle + \lambda \langle x,y \rangle + \overline{\lambda} \langle y,x \rangle + |\lambda|^2 \langle y,y \rangle$

misalkan,

$$\lambda = -\frac{\langle x,y \rangle}{\langle y,y \rangle}$$

maka:

$$= \langle x,x \rangle + \left(-\frac{\langle x,y \rangle}{\langle y,y \rangle}\right) \langle y,x \rangle + \frac{\langle x,y \rangle}{\langle y,y \rangle} \langle x,y \rangle + \left| \frac{\langle x,y \rangle}{\langle y,y \rangle} \right|^2 \langle y,y \rangle$$

$$0 \leq \langle x,x \rangle + \frac{1}{|\langle y,y \rangle|} |\langle x,y \rangle|^2$$

$$|\langle x,y \rangle|^2 \leq \langle x,x \rangle \langle y,y \rangle \tag{2.2}$$

Karena ketaksamaaan (2.1) ekuivalen dengan ketaksamaan (2.2) maka teorema 2.1 terbukti ■.

Teorema 2.2 (Nikodem dkk , 2011) Ruang Norma $(X, \|.\|)$ berdasarkan aturan jajaran genjang Jordan-Von Neumann yaitu:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \; x, y \in X \tag{2.3}$$

<u>Bukti:</u>

Berdasarkan sifat norma maka:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\|x \, y\| + \|y\|^2$$

dan

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\|xy\| + \|y\|^2$$

Sehingga,

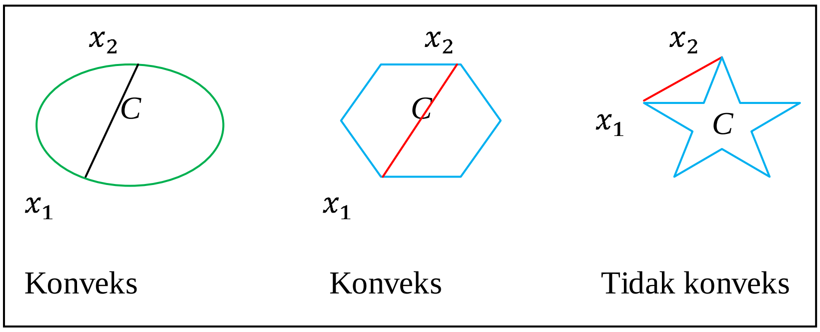
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + 2\|xy\| + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\|xy\| + \|y\|^2$$

$$= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2,\ x,y \in X$$

maka teorema 2.2 terbukti ■.

2.3 Fungsi Konveks

Definisi 2.4 (Boyd dkk, 2004) Himpunan C dikatakan bersifat konveks jika terdapat dua titik dalam C yang membentuk segmen garis yang juga terletak dalam C.



Gambar 2.1 Konveks dan tidak konveks

Bentuk kurva yang digambarkan di atas memperlihatkan bentuk konveks dan tidak konveks suatu himpunan sesuai dengan definisi di atas. Secara matematis, bentuk definisi tersebut dapat dituliskan kembali dengan memberikan setiap titik $x_1, x_2 \in C$ dan $\forall\, 0 \le \lambda \le 1$ maka $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in C$ (Panggarapan, 2009).

Contoh 2.1: Misal $[a,b] \subset \mathbb{R}$ tunjukkan bahwa interval ini adalah himpunan konveks!

<u>Jawab:</u>

Diberikan $x,y \in [a,b]$ dan pilih sebarang $\lambda \in [0,1]$, akan dibuktikan: $\lambda x + (1-\lambda)\, y \in [a,b],\ \forall\ \lambda \in [0,1]$, karena $x, y \in [a, b]$ dan $\lambda \in [1,0]$ maka $x, y \leq b$ berarti $\lambda x + (1 - \lambda)\, y \leq b$ dengan kecocokan yang sama berlaku pula $\lambda x + (1 - \lambda)\, y \geq a$ untuk sebarang λ, x dan y maka: $\lambda x + (1 - \lambda)\, y \in [a, b]$, karena $\lambda x + (1 - \lambda)\, y \in [a, b]$ maka terbukti bahwa $[a, b] \subset \mathbb{R}$ adalah himpunan konveks ■.

Teorema 2.3 ***The discrete case of jensen's inequality*** (Dahl, 2010) Sebuah fungsi f didefinisikan pada interval I adalah konveks jika dan hanya jika $\forall x_1, x_2, x_3, \ldots x_n \in I$ dan $\forall\, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n \in [0, 1]$ dengan $\sum_{j=1}^{r} \lambda_j = 1$, berarti berlaku: $f(\sum_{j=1}^{r} \lambda_j\, x_j) \leq \sum_{j=1}^{r} \lambda_j\, f(x_j)$ (2.4)

Bukti:

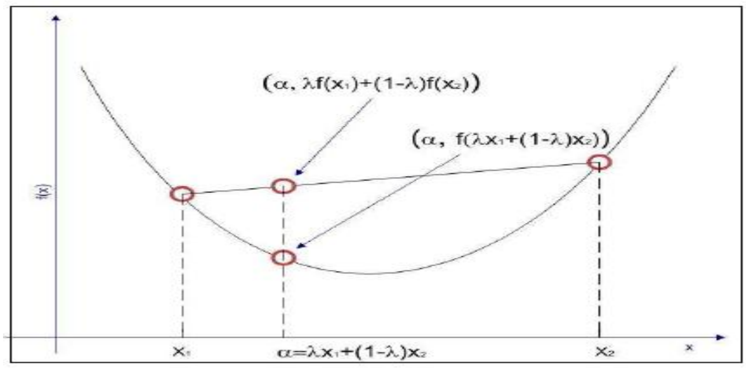
Ambil nilai $r \geq 2$, andaikan bahwa setiap himpunan titik dari r dan skalar berada pada (2.4). diberikan $\forall x_1, x_2, x_3, \ldots x_n \in I$ dan $\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_{r+1} \geq 0$ berlaku $\sum_{j=1}^{r+1} \lambda_j = 1$ karena $r \geq 2$ maka $\lambda_{r+1} < 1$. didefinisikan $\lambda = 1 - \lambda_{r+1}$ jadi $\lambda > 0$, diambil titik lain $y = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{r} \lambda_j x_j$ maka: $f(y) \leq \sum_{j=1}^{r} (\frac{\lambda j}{\lambda})\, f(x_j)$. Kombinasi ketaksamaan ini dengan konveks dari fungsi f diperoleh:

$$f\left(\sum_{j=1}^{r+1} \lambda_j\ x_j \right) = f(\lambda y + \lambda_{r+1} x_{r+1}) \leq \lambda f(y) + \lambda_{r+1} f(x_{r+1})\ \sum_{j=1}^{r+1} \left(\frac{\lambda j}{\lambda}\right) f(x_j)$$

teorema *jensen's inequality* terbukti ■.

Definisi 2.5 (Boyd dkk, 2004) Sebuah fungsi $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dikatakan konveks jika domain f adalah himpunan konveks dan jika $\forall x, y \in$ domain f, dan $\lambda \in [1,0]$ berlaku:

$$f\,(\lambda x + (1 - \lambda) y) \leq \lambda\, f\,(x) + (1 - \lambda) f(y) \quad (\textit{jensen's inequality}) \qquad (2.5)$$



Gambar 2.2 Fungsi Konveks

Pertidaksamaan pada definisi (2.5) telah ditunjukkan secara geometri pada gambar di atas.

Definisi 2.6 Diberikan K *subset* konveks dari ruang vektor $V, f : K \to R$ jika memenuhi:

1. Konveks

   Konveks jika $f\ (\lambda x + (1-\lambda)y\ ) \leq \lambda\ f\ (x) + (1-\lambda)f(y),\ \ \forall\ x, y \in K$ dan $\lambda \in [0,1]$.

2. Konkav

   Konkav berarti lekuk atau cekung yaitu jika fungsi f konveks, maka fungsi konkav adalah $-f$

   $f\ (\lambda x\ +\ (1-\lambda)y\ \geq\ \lambda\, f\ (x)\ +\ (1-\lambda)\ f\ (y).$ (2.6)

3. Sama atau linier jika fungsi f konveks dan konkav

   $f\ (\lambda x\ +\ (1-\lambda)y\ =\ \lambda\, f(x)\ +\ (1-\lambda)\ f\ (y)$ (2.7)

4. Konveks sempurna jika fungsi f konveks (2.5) dan sempurna, untuk setiap $\lambda\ \in (0,1)$ dan $(x \neq y)$, secara matematik dapat ditulis:

   $f(\lambda x\ +\ (1-\lambda)y\ <\ \lambda\, f(x)\ +\ (1-\lambda)\ f(y)$ (2.8)

Contoh 2.2 Andaikan f konveks maka $\forall\ x, y\ \in \mathbb{R}$ berlaku:

$f(\lambda x\ +\ (1-\lambda)y\ ) \leq\ \lambda\, f(x) +\ (1-\lambda)f(y),$

kemudian kalikan kedua sisi pada ketaksamaan tersebut dengan -1 diperoleh:

$-f(\lambda x\ +\ (1-\lambda)y\ ) \geq\ -[\lambda\, f(x) +\ (1-\lambda)f(y)]$

maka fungsi $-f$ menjadi konkav. Sekarang andaikan fungsi $-f$ konkav dan dikalikan kembali dengan -1 maka fungsi $-f$ kembali seperti semula $f(\lambda x\ +\ (1-\lambda)y\ ) \leq\ \lambda\, f(x) +\ (1-\lambda)f(y)$, berarti fungsi f konveks.

Teorema 2.4 (Madden dkk, 1994) Andaikan $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ maka fungsi f adalah konkav jika dan hanya jika, $f\ (x') +\ (x\ -\ x')f'(x') \geq\ f(x),\ \ \forall\ x, x'\ \in \mathbb{R}$.

Bukti :

(⇐) Berdasarkan teorema 2.4 untuk pembuktian ke kiri berarti diketahui $f(x') + (x - x') f'(x') \geq f(x), \forall x, x' \in \mathbb{R}$, akan ditunjukkan: $f(\lambda x + (1-\lambda) x') \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x')$, karena berlaku untuk setiap $x, x' \in \mathbb{R}$, ambil $x' = x''$, $\lambda \in [0,1]$ maka dapat ditulis:

$$f(x'') + (x - x'') f'(x'') \geq f(x) \tag{2.9}$$

dengan cara yang sama karena berlaku untuk setiap $x, x'' \in \mathbb{R}$, ambil $x = x'$ maka dapat ditulis: $f(x'') + (x' - x'') f'(x'') \geq f(x')$ (2.10)

kalikan (2.9) dengan λ dan (2.10) dengan $(1-\lambda)$

$$\lambda[f(x'') + (x - x'') f'(x'') \geq f(x)]$$

$$= \lambda f(x'') + \lambda (x - x'') f'(x'') \geq \lambda f(x) \tag{2.11}$$

$$(1-\lambda)[f(x'') + (x' - x'') f'(x'') \geq f(x')]$$

$$= f(x'') - \lambda f(x'') + (x' - x'') f'(x'') - \lambda(x' - x'') f'(x'') \geq (1-\lambda) f(x') \tag{2.12}$$

kemudian jumlahkan ketaksamaan (2.11) dan (2.12) diperoleh ketaksamaan berikut:

$$f(x'') + f'(x'')[\lambda x + (1-\lambda)x' - x''] \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x')$$

ambil $x'' = \lambda x + (1-\lambda)x'$ maka:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)x') + f'(\lambda x + (1-\lambda)x')(x'' - x'') \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x')$$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)x') \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x') \tag{2.13}$$

(⇒) Berdasarkan teorema 2.4 untuk pembuktian ke kanan berarti diketahui f konkav, akan ditunjukkan $f(x') + (x - x') f'(x') \geq f(x)$, $\forall x, x' \in \mathbb{R}$., karena f konkav berarti:

$$f(\lambda x + (1-\lambda) x') \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x'),\ x, x' \in \mathbb{R}, \lambda \in [0,1]$$

$$f[x' + \lambda(x - x')] - f(x') \geq \lambda[f(x) - f(x')], \quad \forall \lambda \in [0,1] \text{ dan } \quad x, x' \in \mathbb{R}$$

dengan manipulasi aljabar diperoleh ketaksamaan berikut:

$$\frac{(f[x' + \lambda(x - x')] - f(x'))}{\lambda(x - x')}(x - x') \geq f(x) - f(x')$$

misalkan $\lambda \neq 0$, $\lambda \in (0,1]$ dan $x, x' \in \mathbb{R}$ kemudian substitusi $(x - x')\lambda = \Delta x$, diperoleh ketaksamaan berikut:

$$\frac{(f[x' + \Delta x] - f(x'))}{\Delta x}(x - x') \geq f(x) - f(x'),$$

karena $\lambda \to 0$ maka diperoleh:

$(x - x')f(x') \geq f(x) - f(x')$ atau

$$f(x') + (x - x')f(x') \geq f(x), \; x, x' \in \mathbb{R} \tag{2.13}$$

dari (2.12) dan (2.13) teorema 2.4 (Madden dkk,1994) terbukti ■.

2.4 Fungsi Konveks Kuat

Definisi 2.7 (Nikodem dkk , 2011) Diberikan $(X, \|.\|)$ adalah ruang norma riil dan D adalah *subset* konveks dari X, c adalah konstanta positif, maka $f: D \to R$ dikatakan fungsi konveks kuat jika:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) - c\,\lambda(1-\lambda)\|x - y\|^2 \tag{2.14}$$

untuk setiap $x, y \in D$ dan $\lambda \in (0,1)$.

Definisi 2.8 (Nikodem dkk, 2011) Untuk setiap $x, y \in D$ fungsi f dikatakan fungsi semi konveks kuat dengan modulus c, jika f fungsi konveks kuat dengan $\lambda = \frac{1}{2}$.

$$f\left(\frac{(x+y)}{2}\right) \leq \left(\frac{f(x) + f(y)}{2}\right) - \frac{c}{4}\|x - y\|^2, \qquad x, y \in D \tag{2.15}$$

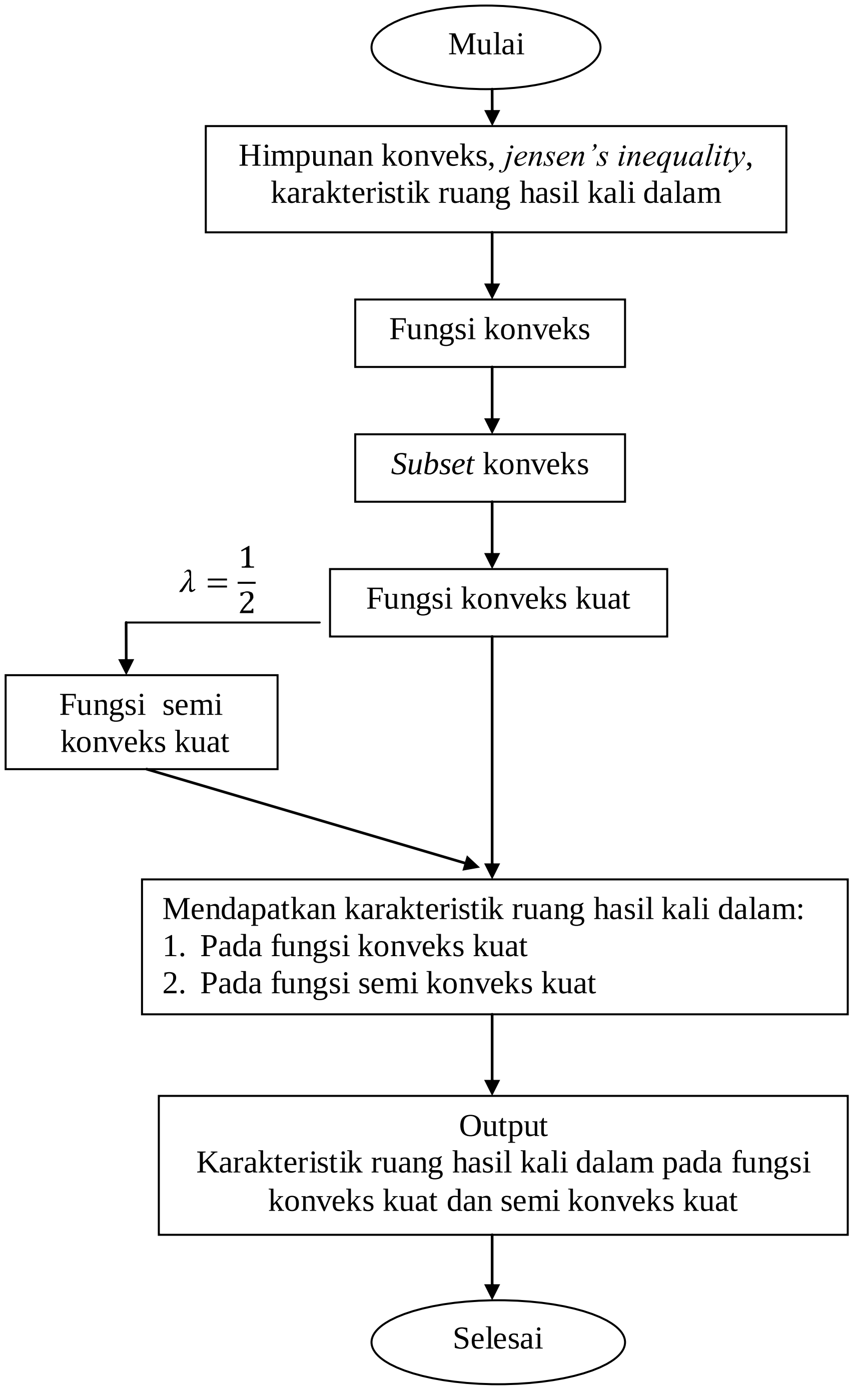
BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Metode yang digunakan penulis dalam penulisan tugas akhir ini adalah studi pustaka yaitu dengan mempelajari literatur-literatur yang berhubungan dengan permasalahan yang akan dibahas dalam penyusunan tugas akhir ini.

Adapun langkah-langkah yang akan dilakukan dalam penulisan tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Memahami dengan cara mempelajari definisi tentang himpunan konveks, definisi dan karakteristik ruang hasil kali dalam dan teorema *Jensen's inequality*.
2. Untuk memperoleh fungsi konveks, diambil f himpunan konveks dan teorema *Jensen's inequality*.
3. Setelah fungsi f konveks maka syarat *subset* konveks terpenuhi.
4. Domain dari fungsi konveks kuat merupakan *subset* konveks yang telah terpenuhi pada poin tiga.
5. Dengan memberikan nilai $\lambda = \frac{1}{2}$ pada fungsi konveks kuat diperoleh fungsi semi konveks kuat.
6. Memperoleh karakteristik ruang hasil kali dalam pada fungsi konveks kuat dan fungsi semi konveks kuat.

Untuk lebih jelasnya urutan dari poin-poin di atas dapat lihat pada *flow chart* di bawah ini:



Gambar 3.1 ***Flow Chart*** **Metode Penelitian**

BAB IV

KARAKTERISTIK RUANG HASIL KALI DALAM PADA FUNGSI KONVEKS KUAT

Bab ini akan membahas tentang karakteristik ruang hasil kali dalam pada fungsi konveks kuat. Pembahasan ini dimulai dengan pengenalan terhadap fungsi konveks kuat dan fungsi semi konveks kuat yang selanjutnya akan ditentukan karakteristik ruang hasil kali dalam pada fungsi konveks kuat.

4.1 Fungsi Konveks Kuat

Fungsi konveks kuat merupakan suatu fungsi yang di dalamnya terdapat karakteristik ruang hasil kali dalam seperti yang telah ditunjukkan pada ketaksamaan (2.13) dan ditulis kembali seperti ketaksamaan di bawah ini:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) - c\,\lambda(1-\lambda)\left\|x-y\right\|^2 \qquad (4.1)$$

dengan $x, y \in \mathbb{R}$ dan $\lambda = (0,1)$. Selanjutnya dari fungsi konveks kuat diperoleh fungsi semi konveks kuat dengan nilai $\lambda = \frac{1}{2}$ yaitu:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} - \frac{c}{4}\left\|x-y\right\|^2, \qquad x, y \in D \qquad (4.2)$$

diberikan f fungsi konveks kuat:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) - \mathrm{c}\,\lambda(1-\lambda)\left\|x-y\right\|^2$$

dengan nilai $\lambda = \frac{1}{2}$ akan ditunjukkan f fungsi semi konveks kuat,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) - \mathrm{c}\,\lambda(1-\lambda)\left\|x-y\right\|^2$$

$$f(\frac{1}{2}x + \left(1-\frac{1}{2}\right)y) \leq \frac{1}{2}f(x) + \left(1-\frac{1}{2}\right)f(y) - c.\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})\left\|x-y\right\|^2$$

$$f\,(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}) \leq \frac{1}{2}\,f(x) + \frac{1}{2}f(y) - \frac{c}{4}\left\|x-y\right\|^2$$

$$f\,\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq f\,\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{c}{4}\left\|x-y\right\|^2 \qquad (4.3)$$

berdasarkan ketaksamaan (4.3) terbukti bahwa f fungsi semi konveks kuat ■.

Contoh 4.1 Diberikan Diberikan $X = \mathbb{R}^2$ dan $\left\|x\right\|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2$, dengan $x = (x_1, x_2)$ dan $\lambda \in (0,1)$, diambil $f = \left\|.\right\|^2$ maka $g = f - c\left\|.\right\|^2 = 0$. Tunjukkan bahwa f merupakan fungsi konveks kuat pada modulus 1, berarti $x = (1,0)$ dan $y = (0,1)$.

Jawab:

Diketahui $X = \mathbb{R}^2$ dan $\left\|x\right\|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2$, dengan $x = (1,0)$ dan $y = (0,1)$ akan ditunjukkan :

$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) - c\,\lambda(1-\lambda)\left\|x-y\right\|^2$.

Karena $\lambda \in (0,1)$ diambil $\lambda = \frac{1}{2}$ maka,

$$f\left(\frac{(x+y)}{2}\right) \leq \left(\frac{f(x) + f(y)}{2}\right) - \frac{1}{4}\left\|x-y\right\|^2$$

$$f\left(\frac{(x+y)}{2}\right) = \left|\frac{x_1+y_1}{2}\right|^2 + \left|\frac{x_2+y_2}{2}\right|^2$$

$$= \left|\frac{1+0}{2}\right|^2 + \left|\frac{0+1}{2}\right|^2 = \frac{1}{2} \tag{4.4}$$

dan

$$\left(\frac{f(x) + f(y)}{2}\right) - \frac{1}{4}\left\|x-y\right\|^2 = \left(\frac{|x_1|^2 + |x_2|^2 + |y_1|^2 + |y_2|^2}{2}\right)$$

$$-\frac{1}{4}(|x_1|^2 + |x_2|^2 - 2\langle x|y\rangle + |y_1|^2 + |y_2|^2)$$

$$= \frac{|1|^2 + |0|^2 + |0|^2 + |1|^2}{2} - \frac{1}{4}(|1|^2 + |0|^2 - 2(1.0 + 0.1) + |0|^2 + |1|^2)$$

$$= \frac{1}{2} \tag{4.5}$$

dari (4.4) dan (4.5) diperoleh $f\left(\frac{(x+y)}{2}\right) = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} = \left(\frac{f(x)+f(y)}{2}\right) - \frac{1}{4}\left\|x-y\right\|^2$ berarti terbukti bahwa f fungsi konveks kuat ■.

4.2 Lemma dan Teorema yang Digunakan untuk Mendapatkan Karakteristik Ruang Hasil Kali Dalam

Lemma 4.2.1 Diberikan $(X, \left\|.\right\|)$ suatu ruang hasil kali dalam riil, *D subset* konveks dari X dan c adalah konstanta positif maka:

1. Suatu fungsi $f\colon D \to \mathbb{R}$ adalah fungsi konveks kuat dengan modulus c jika dan hanya jika fungsi $g = f - c\|.\|^2$ adalah fungsi konveks.
2. Suatu fungsi $f\colon D \to \mathbb{R}$ adalah fungsi semi konveks kuat dengan modulus c jika dan hanya jika fungsi $g = f - c\|.\|^2$ adalah fungsi semi konveks.

Bukti:

1. ($\Rightarrow$) Berdasarkan lemma 4.2.1 pada poin 1 untuk pembuktian ke kanan, diketahui f fungsi konveks kuat dengan modulus c, akan ditunjukkan g konveks!

   f fungsi konveks kuat dengan modulus c maka:

   $$g(\lambda x + (1-\lambda)y) = f(\lambda x + (1-\lambda)y) - c\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2 \quad (4.6)$$
   $$\leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - c\lambda(1-\lambda)\|x - y\|^2 - c\|\lambda x + (1-\lambda)\, y\|^2$$

   dengan menggunakan sifat dasar ruang hasil kali dalam $\|.\|^2 = \langle x|y\rangle$ diperoleh:

   $$\leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - c[\lambda(1-\lambda)(\|x\|^2 - 2\langle x|y\rangle + \|y\|^2) + \lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda(1-\lambda)\langle x|y\rangle + (1-\lambda)^2\|y\|^2$$
   $$= \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - c\lambda\|x\|^2 - c(1-\lambda)\|y\|^2$$
   $$= \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y) \quad (4.7)$$

   terbukti g konveks ■.

   ($\Leftarrow$) Berdasarkan lemma 4.2.1 pada poin 1 untuk pembuktian ke kiri, diketahui g konveks akan ditunjukkan f fungsi konveks kuat dengan modulus c, karena g konveks berarti:

   $$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = g(\lambda x + (1-\lambda)y) + c\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2 \quad (4.8$$
   $$\leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y) + c[\lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda(1-\lambda)\langle x|y\rangle + (1-\lambda)^2\|y\|^2]$$
   $$= \lambda(g(x) + c\|x\|^2) + (1-\lambda)(g(y) + c\|y\|^2) - c\lambda(1-\lambda)(\|x\|^2 2\langle x|y\rangle + \|y\|^2)$$
   $$= f(x) + (1-\lambda)f(y) - c\lambda(1-\lambda)\|x - y\|^2, \quad (4.9)$$

   terbukti bahwa f konveks kuat pada modulus c ■.

2. ($\Rightarrow$) Berdasarkan lemma 4.2.1 pada poin 2 untuk pembuktian ke kanan, diketahui f fungsi semi konveks kuat dengan modulus c, akan ditunjukkan fungsi g semi konveks!

   f fungsi semi konveks kuat dengan modulus c maka:

   $$g\left(\frac{x+y}{2}\right) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) - c\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 \tag{4.10}$$

   $$\leq \frac{f(x)+f(y)}{2} - \frac{c}{4}\|x-y\|^2 - \frac{c}{4}\|x+y\|^2$$

   dengan aturan jajaran genjang Jordan-Von Neumann (2.3) diperoleh:

   $$= \frac{f(x)+f(y)}{2} - \frac{c}{4}\left(2\|x\|^2 + 2\|y\|^2\right) = \frac{g(x)+g(y)}{2}, \lambda = \frac{1}{2} \tag{4.11}$$

   terbukti fungsi g semi konveks ■.

   ($\Leftarrow$) Berdasarkan lemma 4.2.1 pada poin 2 untuk pembuktian ke kiri, diketahui g fungsi semi konveks, akan ditunjukkan f fungsi semi konveks kuat dengan modulus c, karena g fungsi semi konveks maka:

   $$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = g\left(\frac{x+y}{2}\right) + c\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 \tag{4.12}$$

   $$= \frac{g(x)+c\|x\|^2}{2} + \frac{g(y)+c\|y\|^2}{2} + \frac{c}{4}(\|x+y\|^2 - 2\|x\|^2 - 2\|y\|^2)$$

   $$= \frac{f(x)+f(y)}{2} - \frac{c}{4}\|x-y\|^2 \tag{4.13}$$

   terbukti f fungsi semi konveks kuat dengan modulus c ■.

Contoh 4.2 Diberikan $X = \mathbb{R}^2$ dan $\|x\| = |x_1| + |x_2|$, untuk $x = (x_1, x_2)$ diambil $f = \|.\|^2$, maka $g = f - \|.\|^2 = 0$. Tunjukkan bahwa f bukan fungsi konveks kuat atau bukan fungsi semi konveks kuat pada modulus 1, berarti $x = (1,0)$ dan $y = (0,1)$.

Jawab:

Diketahui $X = \mathbb{R}^2$ dan $\|x\| = |x_1| + |x_2|$, dengan $x = (1,0)$ dan $y = (0,1)$, akan ditunjukkan:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \nleq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) - c\,\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2 \tag{4.14}$$

atau

$$f\left(\frac{(x+y)}{2}\right) \nleq \left(\frac{f(x)+\ f(y)}{2}\right) - \frac{1}{4}\|x-y\|^2. \tag{4.15}$$

Andaikan f fungsi semi konveks kuat maka $\lambda = \frac{1}{2}$, sesuai dengan definisi berlaku

$$f\left(\frac{(x+y)}{2}\right) \leq \left(\frac{f(x)+\ f(y)}{2}\right) - \frac{1}{4}\|x-y\|^2, \tag{4.16}$$

dengan $x = (1{,}0)$ dan $y = (0{,}1)$ maka,

$$f\left(\frac{(x+y)}{2}\right) = \left|\frac{x_1+y_1}{2}\right| + \left|\frac{x_2+y_2}{2}\right| \tag{4.17}$$

$$= \left|\frac{1+0}{2}\right| + \left|\frac{1+0}{2}\right| = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$$

dan

$$\left(\frac{f(x)+\ f(y)}{2}\right) - \frac{1}{4}\|x-y\|^2 = \frac{|x_1| + |x_2| + |y_1| + |y_2|}{2}$$

$$-\frac{1}{4}(\,|x_1| + |x_2|)^2 - 2(x_1y_1 + x_2y_2) + (\,|y_1| + |y_2|)^2\,) \tag{4.18}$$

$$= \frac{|1+0+0+1|}{2} - \frac{1}{4}((1+0)^2 - 2(1.0+0.1) + (0+1)^2)$$

$$= \frac{1}{2}$$

dari (4.17) dan (4.18) diperoleh $f\left(\frac{(x+y)}{2}\right) = 1 > \frac{1}{2} = \left(\frac{f(x)+f(y)}{2}\right) - \frac{1}{4}\|x-y\|^2$ kontradiksi dengan (4.16) berarti terbukti bahwa f bukan fungsi semi konveks kuat hal ini juga berarti f bukan fungsi konveks kuat $\blacksquare$.

Teorema 4.2.1 Diberikan $(X, \|.\|)$ suatu ruang norma riil, penyataan berikut saling ekuivalen satu sama lainnya:

1. Untuk setiap $c > 0$ dan untuk setiap fungsi $f: D \to \mathbb{R}$, f fungsi konveks kuat dengan modulus c jika dan hanya jika $g = f - c\|.\|^2$ adalah konveks;
2. Untuk setiap $c > 0$ dan untuk setiap fungsi $f: D \to \mathbb{R}$, f fungsi semi konveks kuat dengan modulus c jika dan hanya jika $g = f - c\|.\|^2$ adalah semi konveks;

3. Terdapat $c > 0$ sedemikian sehingga, untuk setiap fungsi $f: D \to \mathbb{R}$, g adalah fungsi konveks jika dan hanya jika $f = g + c\|.\|^2$ adalah fungsi konveks kuat dengan modulus c;
4. Terdapat $c > 0$ sedemikian sehingga, untuk setiap fungsi $f: D \to \mathbb{R}$, g adalah fungsi semi konveks jika dan hanya jika $f = g + c\|.\|^2$ adalah fungsi semi konveks kuat dengan modulus c;
5. $\|.\|^2: X \to \mathbb{R}$ adalah fungsi konveks kuat dengan modulus 1;
6. $\|.\|^2: X \to \mathbb{R}$ adalah fungsi semi konveks kuat dengan modulus 1;
7. $(X, \|.\|)$ adalah suatu ruang hasil kali dalam.

Bukti:

Pernyataan pada teorema di atas saling ekuivalen satu sama lain, maka untuk membuktikan teorema tersebut sama halnya dengan menunjukkan kaitan antara poin-poin yaitu: $1 \Rightarrow 3 \Rightarrow 5 \Rightarrow 7$ dan $2 \Rightarrow 4 \Rightarrow 6 \Rightarrow 7$.

1. Pembuktian $(1 \Longrightarrow 3)$ jika diketahui pernyataan 1 maka akan dibuktikan pernyataan 3, sebelumnya kita buktikan dulu pernyataan pada poin 1 yaitu:

   $(\Rightarrow)$ Berdasarkan pernyataan 1 untuk pembuktian ke kanan berarti diketahui $f: D \to \mathbb{R}$ fungsi konveks kuat, $\forall c > 0$ akan ditunjukkan $g = f - c\|.\|^2$ fungsi konveks!

   Diambil sebarang $c = \frac{k}{2^n}$, dengan $n, k \in \mathbb{N}$ dan $k \leq n$, f fungsi konveks kuat berarti:

   $g(\lambda x + (1-\lambda)y) = f(\lambda x + (1-\lambda)y) - \frac{k}{2^n}\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2$

   $\leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - \frac{k}{2^n}\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2 - \frac{k}{2^n}\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2$

   dengan menggunakan sifat dasar ruang hasil kali dalam $\|.\|^2 = \langle x|y\rangle$ diperoleh:

   $\leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - \frac{k}{2^n}[\lambda(1-\lambda)(\|x\|^2 - 2\langle x|y\rangle + \|y\|^2)$

$+\|\lambda x+(1-\lambda)y\|^2]$

$\leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-\frac{k}{2^n}[\lambda(1-\lambda)(\|x\|^2-2\langle x|y\rangle+\|y\|^2)$

$+\lambda^2\|x\|^2+2\lambda(1-\lambda)\langle x|y\rangle+(1-\lambda)^2\|y\|^2]$

$=\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-\frac{k}{2^n}[\lambda\|x\|^2-2\lambda\langle x|y\rangle+\lambda\|y\|^2-\lambda^2\|x\|^2+$

$2\lambda^2\langle x|y\rangle+\lambda^2\|y\|^2+\lambda^2\|x\|^2+2\lambda\langle x|y\rangle-2\lambda^2\langle x|y\rangle+\|y\|^2-$

$2\lambda\|y\|^2+\lambda^2\|y\|^2]$

$=\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-\frac{k}{2^n}[\lambda\|x\|^2-\lambda\|y\|^2-\|y\|^2]$

$=\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-\frac{k}{2^n}[\lambda\|x\|^2+(1-\lambda)\|y\|^2]$

$=\lambda f(x)-\frac{k}{2^n}\lambda\|x\|^2+(1-\lambda)f(y)-\frac{k}{2^n}(1-\lambda)\|y\|^2$

$$=\lambda g(x)+(1-\lambda)g(y) \tag{4.19}$$

terbukti g konveks ■.

($\Leftarrow$) Berdasarkan pernyataan 1 untuk pembuktian ke kiri berarti diketahui $g=f-c\|.\|^2$ fungsi konveks, akan ditunjukkan $f:D\rightarrow\mathbb{R}$ fungsi konveks kuat, $\forall c>0$.

Diambil sebarang $c=\frac{k}{2^n}$, dengan $n,k\in\mathbb{N}$ dan $k\leq n$, g fungsi konveks berarti:

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)=g(\lambda x+(1-\lambda)y)+\frac{k}{2^n}\|\lambda x+(1-\lambda)y\|^2$$

$$\leq \lambda g(x)+(1-\lambda)g(y)+\frac{k}{2^n}\left(\|\lambda x+(1-\lambda)y\|^2\right)$$

dengan menggunakan sifat dasar ruang hasil kali dalam $\|.\|^2=\langle x|y\rangle$ diperoleh:

$\leq \lambda g(x)+(1-\lambda)g(y)+\frac{k}{2^n}(\lambda^2\|x\|^2+2\lambda(1-\lambda)\langle x|y\rangle+(1-\lambda)^2\|y\|^2$

$\leq \lambda g(x)+\frac{k}{2^n}\lambda\|x\|^2+(1-\lambda)g(y)+\frac{k}{2^n}(1-\lambda)\|y\|^2-\frac{k}{2^n}\lambda(1-$

$\lambda)(\|x\|^2-2\langle x|y\rangle+\|y\|^2)$

$$=\lambda\left(g(x)+\frac{k}{2^n}\|x\|^2\right)+(1-\lambda)\left(g(y)+\frac{k}{2^n}\|y\|^2\right)$$

$-\lambda(1-\lambda)\frac{k}{2^n}\left(\|x\|^2 - 2\langle x|y\rangle + \|y\|^2\right)$

$$= \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - \lambda(1-\lambda)\frac{k}{2^n}\|x-y\|^2 \qquad (4.20)$$

terbukti f fungsi konveks kuat $\forall c = \frac{k}{2^n} > 0$ ■.

Berdasarkan (4.19) dan (4.20) teorema pada poin 1 terbukti.

Selanjutnya akan dibuktikan $1 \Longrightarrow 3$, diketahui: $\forall f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $g = f - c\|.\|^2$ fungsi konveks, akan ditunjukkan $f = g + c\|.\|^2$ fungsi konveks kuat dengan modulus c. Karena berlaku $\forall c > 0$ diambil $c = 1 > 0$, dan $g = f - c\|.\|^2$ fungsi konveks maka:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = g(\lambda x + (1-\lambda)y) + \|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2$$
$$\leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y) + \|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2$$

dengan menggunakan sifat dasar ruang hasil kali dalam $\|.\|^2 = \langle x|y\rangle$ diperoleh:

$$\leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y) + (\|\lambda x\|^2 + 2\lambda(1-\lambda)\langle x|y\rangle + \|\lambda(1-\lambda)y\|^2$$

$$\leq \lambda g(x) + \lambda\|x\|^2 + (1-\lambda)g(y) + (1-\lambda)\|y\|^2 - \lambda(1-\lambda)(\|x\|^2 - 2\langle x|y\rangle + \|y\|^2)$$

$$= \lambda\left(g(x) + \|x\|^2\right) + (1-\lambda)\left(g(y) + \|y\|^2\right) - \lambda(1-\lambda)\left(\|x\|^2 - 2\langle x|y\rangle + \|y\|^2\right)$$

$$= \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - \lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2 \qquad (4.21)$$

terbukti f fungsi konveks kuat dengan modulus c ■.

2. Berdasarkan (4.21) perrnyataan $1 \Longrightarrow 3$ terbukti maka pernyataan 3 berlaku, selanjutnya akan dibuktikan pernyataan poin 5 ($1 \Longrightarrow 3 \Longrightarrow 5$). Berdasarkan poin 3 diketahui $f = g + c\|.\|^2$ fungsi konveks kuat dengan modulus c, akan ditunjukkan $\|.\|^2: X \longrightarrow \mathbb{R}$ adalah fungsi konveks kuat dengan modulus 1. $f = g + c\|.\|^2$ fungsi konveks kuat, diambil fungsi $g = 0$, maka $f = c\|.\|^2$

$$
\begin{aligned}
f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= c\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2 \qquad (4.22)\\
&\leq c(\lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda(1-\lambda)\langle x|y\rangle + (1-\lambda)^2\|y\|^2)\\
&= \lambda c\|x\|^2 + (1-\lambda)c\|y\|^2 - \lambda(1-\lambda)c(\|x\|^2 -\\
&\quad 2\langle x|y\rangle + \|y\|^2)\\
&= c\lambda\|x\|^2 + c(1-\lambda)\|y\|^2 - c\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2
\end{aligned}
$$

merupakan fungsi konveks kuat, sehingga $\frac{1}{c}f = \|.\|^2$ juga merupakan fungsi konveks kuat dengan modulus 1, dengan demikian terbukti bahwa $\|.\|^2 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ adalah fungsi konveks kuat dengan modulus 1 ■.

3. Berdasarkan (4.22) pernyataan $1 \Longrightarrow 3 \Longrightarrow 5$ terbukti maka pernyataan pada poin 5 berlaku, selanjutnya akan dibuktikan pernyataan poin 7 $(1 \Longrightarrow 3 \Longrightarrow 5 \Longrightarrow 7)$. Berdasarkan poin 5 diketahui $\|.\|^2 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ adalah fungsi konveks kuat dengan modulus 1, akan ditunjukkan $(X, \|.\|)$ adalah suatu ruang hasil kali dalam.

   Diambil $x, y \in X$, karena $\|.\|^2 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ adalah fungsi konveks kuat dengan modulus 1 berarti:

$$
\begin{aligned}
f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2\\
&\leq \lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda(1-\lambda)\langle x|y\rangle + (1-\lambda)^2\|y\|^2\\
&= \lambda\|x\|^2 + (1-\lambda)\|y\|^2 - \lambda(1-\lambda)(\|x\|^2\\
&\quad -2\langle x|y\rangle + \|y\|^2)\\
&= \lambda\|x\|^2 + (1-\lambda)\|y\|^2 - \lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2; \qquad (4.23)
\end{aligned}
$$

   dengan $\|x\|^2 = \langle x|y\rangle = (X, \|.\|)$ merupakan ruang hasil kali dalam.

4. Berdasarkan (4.23) pernyataan $1 \Longrightarrow 3 \Longrightarrow 5 \Longrightarrow 7$ terbukti maka pernyataan pada poin 7 berlaku, selanjutnya akan dibuktikan pernyataan poin 1

$(1 \Longrightarrow 3 \Longrightarrow 5 \Longrightarrow 7 \Longrightarrow 1)$. Berdasarkan poin 7 diketahui $\|x\|^2 = \langle x|x\rangle$ merupakan ruang hasil kali dalam, akan ditunjukkan $f = g + c\|.\|^2$ fungsi konveks kuat. $\forall c > 0$, dan g konveks maka berlaku:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = g(\lambda x + (1-\lambda)y) + c\|\lambda x + (1-\lambda)y)\|^2$$

$$\leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y) + \|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2$$

dengan menggunakan sifat dasar ruang hasil kali dalam $\|.\|^2 = \langle x|y\rangle$ diperoleh:

$$\leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y) + (\|\lambda x\|^2 + 2\lambda(1-\lambda)\langle x|y\rangle + \|(1-\lambda)y\|^2$$

$$\leq \lambda g(x) + \lambda\|x\|^2 + (1-\lambda)g(y) + (1-\lambda)\|y\|^2 - \lambda(1-\lambda)(\|x\|^2 - 2\langle x|y\rangle + \|y\|^2)$$

$$= \lambda\left(g(x) + \|x\|^2\right) + (1-\lambda)\left(g(y) + \|y\|^2\right) - \lambda(1-\lambda)\left(\|x\|^2 - 2\langle x|y\rangle + \|y\|^2\right)$$

$$= \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - \lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2 \tag{4.24}$$

terbukti f fungsi konveks kuat dengan modulus c ■.

5. Pembuktian $(2 \Longrightarrow 4)$ jika diketahui pernyataan pada poin 2 maka akan dibuktikan pernyataan poin 4, sebelumnya akan dibuktikan pernyataan pada poin 2 yaitu:

   $(\Rightarrow)$ Berdasarkan pernyataan 2 untuk pembuktian ke kanan berarti diketahui $f: D \to \mathbb{R}$ fungsi semi konveks kuat, $\forall c > 0$, akan ditunjukkan $g = f - c\|.\|^2$ fungsi semi konveks!

   Diambil sebarang $c = \frac{k}{2^n}$, dengan $n, k \in \mathbb{N}$ dan $k \leq n$, f fungsi semi konveks kuat berarti:

$$g(\frac{(x+y)}{2}) = f\frac{(x+y)}{2} - \frac{k}{2^n}\|\frac{x+y}{2}\|^2$$

$$\leq \frac{f(x)+f(y)}{2} - \frac{k}{2^{n+2}}\|x-y\|^2 - \frac{k}{2^{n+2}}\|x+y\|^2$$

   dengan aturan jajaran genjang Jordan-Von Neumann (2.3) diperoleh:

$$= \frac{f(x) + f(y)}{2} - \frac{k}{2^{n+2}}(2\|x\|^2 + 2\|y\|^2)$$

$$= \frac{g(x) + g(y)}{2} \tag{4.25}$$

terbukti g fungsi semi konveks ■.

(⇐) Berdasarkan pernyataan 2 untuk pembuktian ke kiri, berarti diketahui g fungsi semi konveks, akan ditunjukkan $f: D \to \mathbb{R}$ fungsi semi konveks kuat, $\forall c > 0$!

Diambil sebarang $c = \frac{k}{2^n}$, dengan $n, k \in \mathbb{N}$ dan $k \leq n$, f fungsi semi konveks kuat berarti:

$$f\left(\frac{(x + y)}{2}\right) = g\left(\frac{(x + y)}{2}\right) + \frac{k}{2^n}\left\|\frac{x + y}{2}\right\|^2$$

$$\leq \frac{g(x) + g(y)}{2} + \frac{k}{2^{n+2}}\|x + y\|^2$$

dengan aturan jajaran genjang Jordan-Von Neumann (2.3) diperoleh:

$$= \frac{g(x) + \frac{k}{2^n}\|x\|^2}{2} + \frac{g(y) + \frac{k}{2^n}\|y\|^2}{2} + \frac{k}{2^{n+2}}(\|x+y\|^2 - 2\|x\|^2$$

$$-2\|y\|^2)$$

$$= \frac{f(x) + f(y)}{2} - \frac{k}{2^{n+2}}\ \|x-y\|^2 \tag{4.26}$$

terbukti f fungsi semi konveks kuat ■.

Berdasarkan (4.24) dan (4.25) teorema pada poin 2 terbukti,

selanjutnya akan dibuktikan $2 \Longrightarrow 4$, berdasarkan poin 2 diketahui: $\forall f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $g = f - c\|.\|^2$ fungsi semi konveks. Akan ditunjukkan $f = g + c\|.\|^2$ fungsi semi konveks kuat pada c.

Karena berlaku $\forall c > 0$, diambil sebarang $c = 1 > 0$, dan $g = f - c\|.\|^2$ fungsi semi konveks maka:

$$f\left(\frac{(x + y)}{2}\right) = g\left(\frac{(x + y)}{2}\right) + \left\|\frac{x + y}{2}\right\|^2$$

$$\leq \frac{g(x) + g(y)}{2} + \frac{1}{4}\|x + y\|^2$$

dengan aturan jajaran genjang Jordan-Von Neumann (2.3) diperoleh:

$$= \frac{g(x) + \|x\|^2}{2} + \frac{g(y) + \|y\|^2}{2} + \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - 2\|x\|^2 - 2\|y\|^2)$$

$$= \frac{f(x) + f(y)}{2} - \frac{1}{4}\|x-y\|^2 \tag{4.27}$$

terbukti f fungsi semi konveks kuat ■.

6. Berdasarkan (4.26) pernyataan $2 \Longrightarrow 4$ terbukti maka pernyataan pada poin 4 berlaku, selanjutnya akan dibuktikan pernyataan poin 6 $(2 \Longrightarrow 4 \Longrightarrow 6)$. Berdasarkan poin 4 diketahui $f = g + c\|.\|^2$ fungsi semi konveks kuat dengan modulus c, akan ditunjukkan $\|.\|^2 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ adalah fungsi semi konveks kuat dengan modulus 1.

   $f = g + c\|.\|^2$ fungsi semi konveks kuat, kemudian diambil fungsi $g = 0$, maka:

   $$f = c\|.\|^2$$

   $$f\left(\frac{(x+y)}{2}\right) = c\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 \tag{4.28}$$

   $$\leq \frac{c}{4}(\|x\|^2 + 2\langle x|y\rangle + \|y\|^2)$$

   $$= c\left(\frac{\|x\|^2 + \|y\|^2}{2}\right) - \frac{c}{4}(\|x\|^2 - 2\langle x|y\rangle + \|y\|^2)$$

   $$= c\left(\frac{\|x\|^2 + \|y\|^2}{2}\right) - \frac{c}{4}\|x-y\|^2$$

   merupakan fungsi semi konveks kuat sehingga $\frac{1}{c}f = \|.\|^2$ juga merupakan fungsi semi konveks kuat dengan modulus 1. dengan demikian terbukti bahwa $\|.\|^2 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ adalah fungsi semi konveks kuat dengan modulus 1 ■.

7. Berdasarkan (4.27) pernyataan $2 \Longrightarrow 4 \Longrightarrow 6$ terbukti maka pernyataan pada poin 4 berlaku, selanjutnya akan dibuktikan pernyataan poin 7 $(2 \Longrightarrow 4 \Longrightarrow 6 \Longrightarrow 7)$. Berdasarkan poin 6, diketahui $\|.\|^2 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ adalah

fungsi semi konveks kuat dengan modulus 1, akan ditunjukkan $(X, \|.\|)$ adalah suatu ruang hasil kali dalam.

Karena $\|.\|^2 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ adalah fungsi semi konveks kuat dengan modulus 1, maka:

$$f\left(\frac{(x+y)}{2}\right) = \left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 \leq \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2}{2} - \frac{1}{4}\|x-y\|^2$$

dengan $\|x\|^2 = \langle x|x \rangle$ merupakan ruang hasil kali dalam dan karena

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \leq 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \forall x, y \in X \quad (4.29)$$

Misalkan $u = x + y$ dan $v = x - y$ maka diperoleh ketaksamaan berikut:

$$2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 \leq \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2, u, v \in X \quad (4.30)$$

Berdasarkan ketaksamaan (4.29) dan (4.30) berarti norma berlaku pada aturan jajaran genjang, yang menyatakan bahwa $(X, \|.\|)$ adalah ruang hasil kali dalam.

8. Berdasarkan (4.29) dan (4.30) pernyataan $2 \Longrightarrow 4 \Longrightarrow 6 \Longrightarrow 7$ terbukti maka pernyataan pada poin 7 berlaku, selanjutnya akan dibuktikan pernyataan poin 2 $(2 \Longrightarrow 4 \Longrightarrow 6 \Longrightarrow 7 \Longrightarrow 2)$. Berdasarkan poin 7 diketahui $\|x\|^2 = \langle x|x \rangle$ merupakan ruang hasil kali dalam, akan ditunjukkan $f = g + c\|.\|^2$ fungsi semi konveks kuat!

   Karena berlaku $\forall c > 0$, diambil $c = 1$ dan g konveks maka :

$$f\left(\frac{(x+y)}{2}\right) = g\left(\frac{(x+y)}{2}\right) + c\left\| \left(\frac{(x+y)}{2}\right) \right\|^2$$

$$\leq \frac{g(x)+g(y)}{2} + \frac{1}{4}\|\lambda + y\|^2$$

   dengan menggunakan sifat dasar ruang hasil kali dalam $\|.\|^2 = \langle x|y \rangle$ diperoleh:

$$\leq \frac{g(x)+g(y)}{2} + \frac{1}{4}(\|x\|^2 + 2\langle x|y \rangle + \|y\|^2)$$

$$= \frac{g(x)+\|x\|^2}{2} + \frac{g(y)+\|y\|^2}{2} - \frac{1}{4}(\|x\|^2 - 2\langle x|y \rangle + \|y\|^2)$$

$$= \frac{g(x) + \|x\|^2}{2} + \frac{g(y) + \|y\|^2}{2} - \frac{1}{4}\left(\|x - y\|^2\right)$$

$$= \frac{f(x) + f(y)}{2} - \frac{1}{4}\left(\|x - y\|^2\right) \tag{4.31}$$

terbukti f fungsi semi konveks kuat dengan modulus c ■.

Berdasarkan pembuktian tiap-tiap pernyataan tersebut terlihat adanya kaitan antara pernyataan $1 \Rightarrow 3 \Rightarrow 5 \Rightarrow 7 \Rightarrow 1$ dan $2 \Rightarrow 4 \Rightarrow 6 \Rightarrow 7 \Rightarrow 2$, hal ini menyatakan bahwa tiap pernyataan saling ekuivalen, maka teorema 4.2.1 terbukti.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya dapat disimpulkan bahwa: suatu fungsi $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ dikatakan fungsi konveks kuat yaitu jika diberikan $(X, \|.\|)$ adalah ruang norma riil dan D adalah *subset* konveks dari X, c adalah konstanta positif maka:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) - c\,\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2.$$

Selanjutnya jika diberikan $\lambda = \frac{1}{2}$ pada fungsi konveks kuat diperoleh fungsi semi konveks kuat yaitu:

$$f\left(\frac{(x+y)}{2}\right) \leq \left(\frac{f(x) + f(y)}{2}\right) - \frac{c}{4}\|x-y\|^2, \qquad x, y \in D.$$

Dengan memanfaatkan aturan jajaran genjang Jordan-Von Neumann pada lemma dan teorema, diperoleh karakteristik ruang hasil kali dalam pada fungsi konveks kuat yaitu berlakunya:

1. $(X, \|.\|)$ merupakan ruang hasil kali dalam,
2. $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ adalah fungsi konveks kuat dengan modulus $c > 0$ jika dan hanya jika $f - c\|.\|^2$ adalah fungsi konveks,
3. $\|.\|^2$ adalah fungsi konveks kuat dengan modulus 1.

5.2 Saran

Tugas akhir ini membahas karakteristik ruang hasil kali dalam pada fungsi konveks kuat dengan dua titik yaitu x dan y. Pembaca dapat mengkombinasikan *n* titik pada fungsi konveks kuat selanjutnya mendapatkan karakteristik ruang hasil kali dalam pada fungsi konveks kuat dari kombinasi *n* titik tersebut .

DAFTAR PUSTAKA

Boyd, Stephen dan Vandenberghe, Lieven. *Convex Optimation*. Cambridge University press. 2004

Dahl, Geir. *An Introduction to Convexity*. University of Oslo, Centre of Mathematics for Applications. 2010.

Greenberg, Harvey J dan Pierskalla. *A Review of Quasi-Convex Functions.* U.S.A.Operation Research. 1971.

Hachez, Yvan. *Convex Optimization Over Non- Negatif Polynomials Structured Algorithms and Applications*. Universite catholique de Louvain. 2003.

Http://www.math.caltech.edu/courses/convexity.pdf, diakses 26 Maret 2011.

Kreyszig, Erwin. *Introductory Functional Analysis With Aplications.* John Wiley & Sons, New York.1978.

Maden dkk. *Convex Sets and Concave Functions*. Natalia Lazzati. 1994.

Niculescu, Constantin P dan Erik Persson- Lars. *Convex Functions and Their Application.* Springer, Berlin Heidelberg NewYork. 2004.

Nikodem, Kazimierz dan Pales, Zsolt. Characterizations of Inner Product Spaces by Strongly Convex Functions. *Banach J. Math*. 5 (2011), no. 1, 83- 87. 2011.

Pangarapan. S, Lasker. Analisis Persoalan Optimasi Konveks Dua Tahap. *Tesis*, Medan. 2009.

Zhang, Jian. *Convex Set and Convex Functions*. Jianjang@Stat. Purdu. Edu.